



Wykład 2

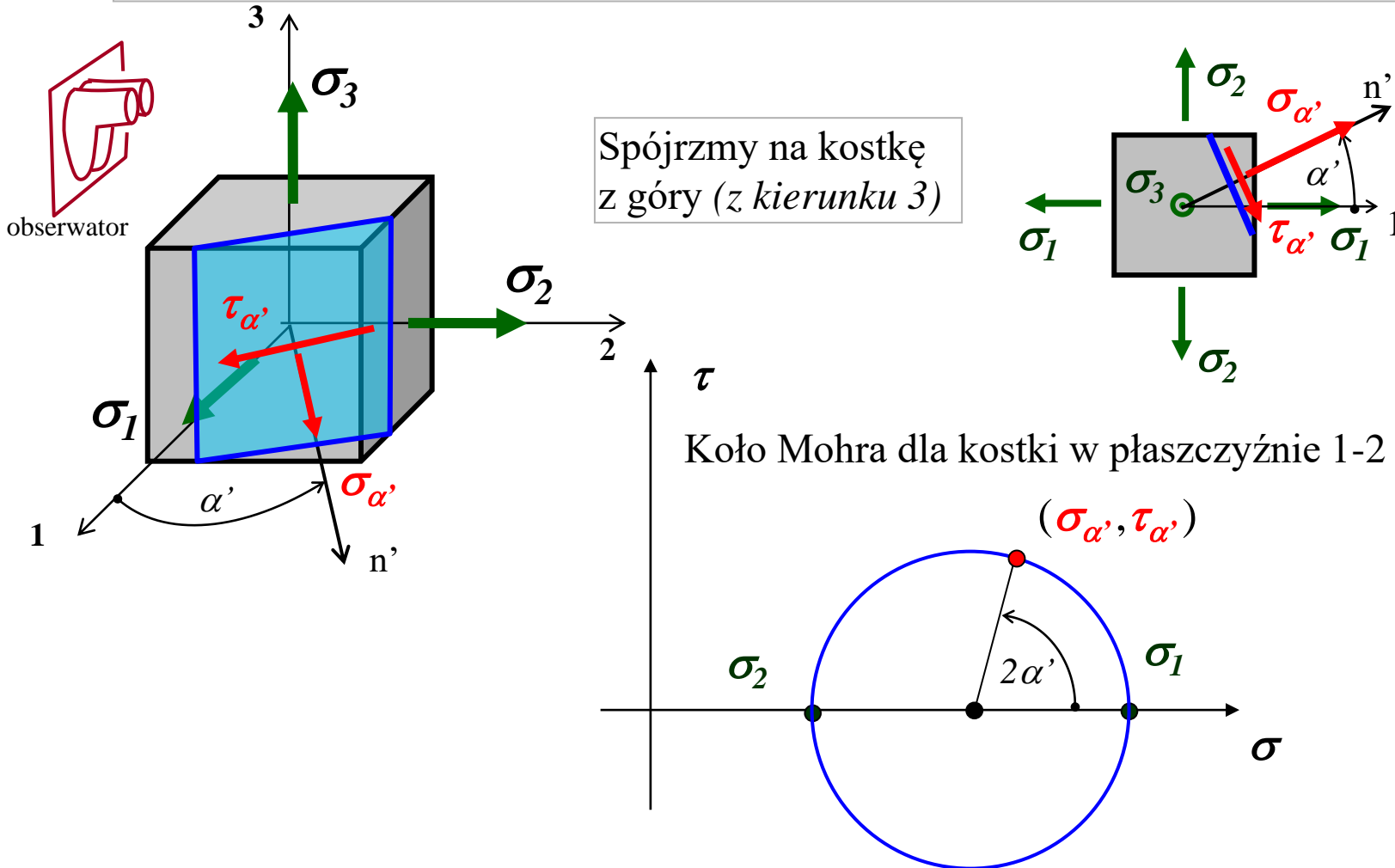
Przestrzenny stan naprężenia

Uproszczona analiza stanu trójwymiarowego
Metoda ogólna wyznaczania naprężeń głównych
Równania równowagi w naprężeniach

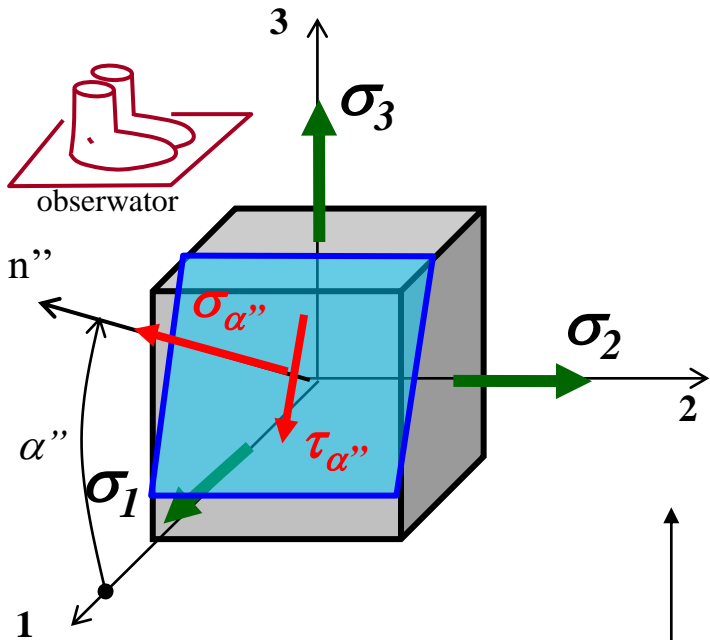
Uproszczona analiza stanu 3D

Rozważmy przestrzenny stan naprężenia w punkcie reprezentowany przez kostkę wyciętą myślowo w kierunkach głównych: **1, 2, 3**.

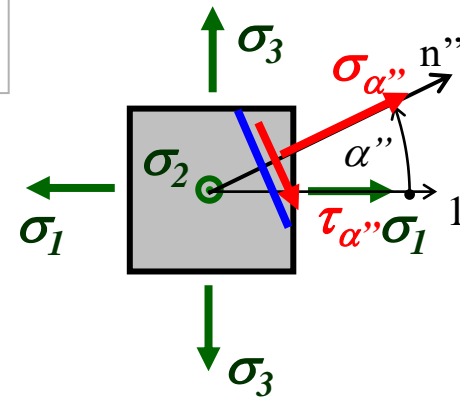
Na ściankach kostki uwidoczniemy naprężenia główne: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$



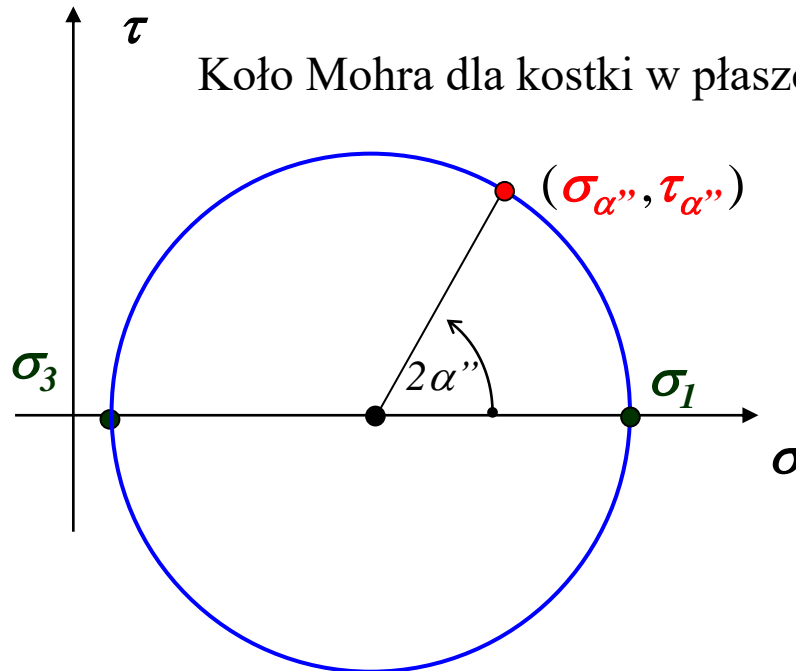
Uproszczona analiza stanu 3D



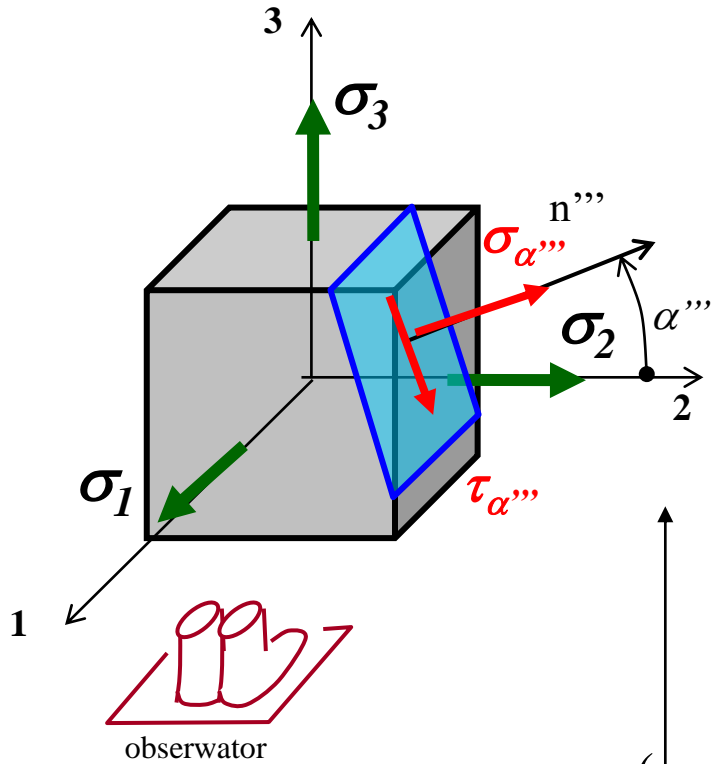
Spójrzmy na kostkę z lewej (z kierunku 2)



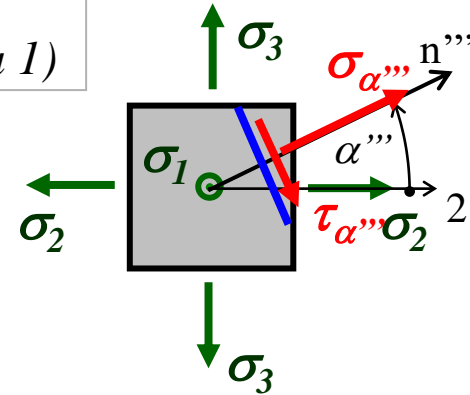
Koło Mohra dla kostki w płaszczyźnie 1-3



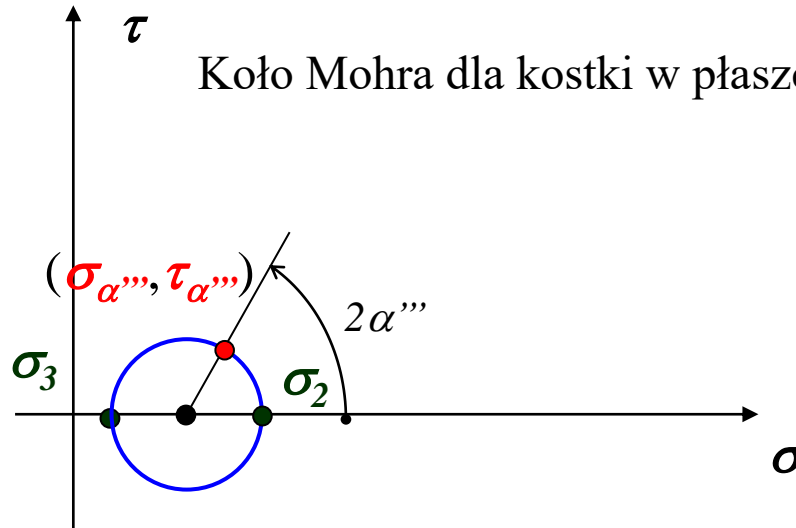
Uproszczona analiza stanu 3D



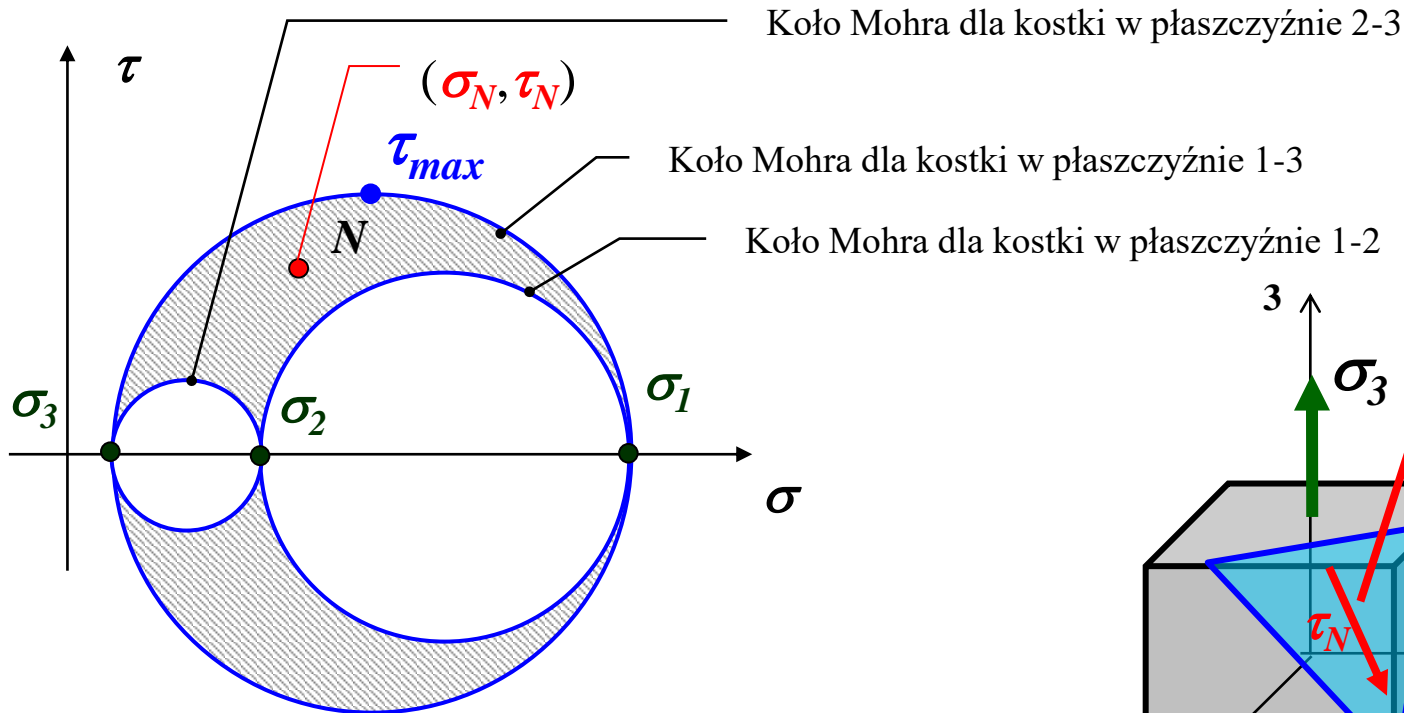
Spójrzmy na kostkę od przodu (z kierunku 1)



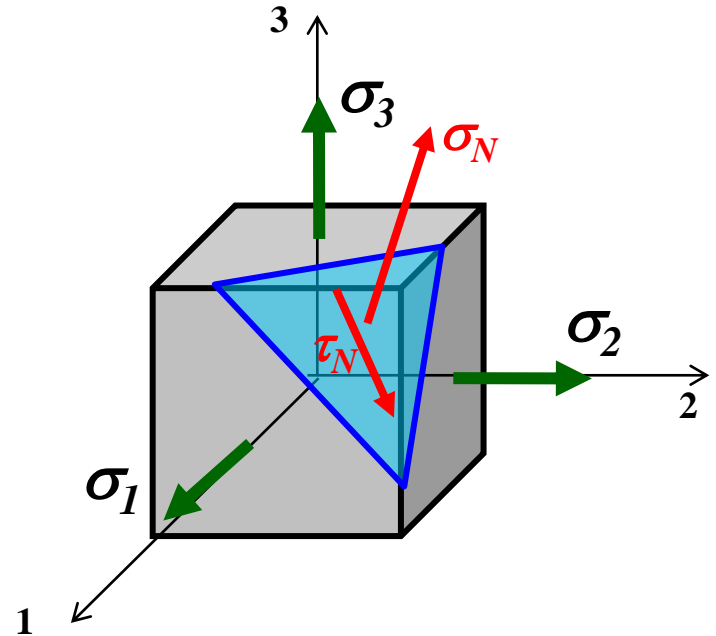
Koło Mohra dla kostki w płaszczyźnie 2-3



Uproszczona analiza stanu 3D



W Teorii Sprężystości dowodzi się, że punkt N leży w polu zakreskowanym między kołami w przestrzeni naprężeń



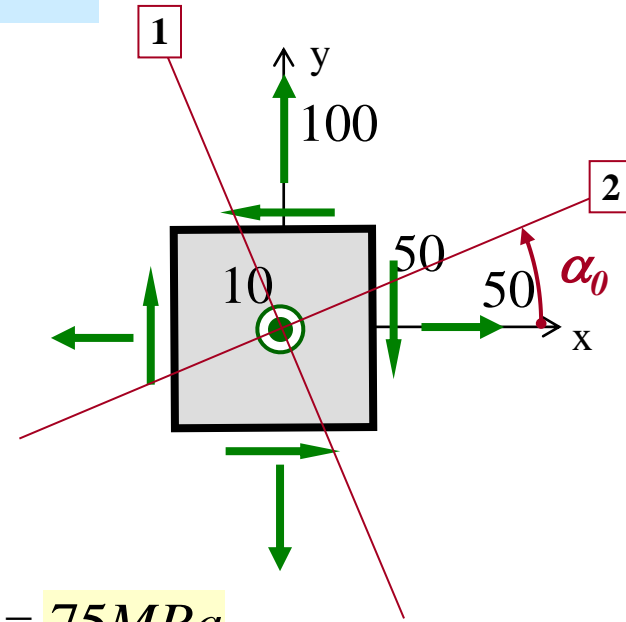
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|$$

Jeśli w zadaniu odwrotnym (*poszukiwania naprężeń głównych*) na jednym z kierunków mamy naprężenie główne, to możliwe jest rozwiązanie zadania z wykorzystaniem schematu kół Mohra.

Przykład 1. Znaleźć kierunki główne i wartości główne stanu naprężenia.
Wyznaczyć wartość τ_{max} i płaszczyznę jego działania.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= 50 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 100 \text{ MPa} \\ \sigma_z &= 10 \text{ MPa} \\ \tau &= 50 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Spójrzmy na kostkę z góry (z kierunku z)



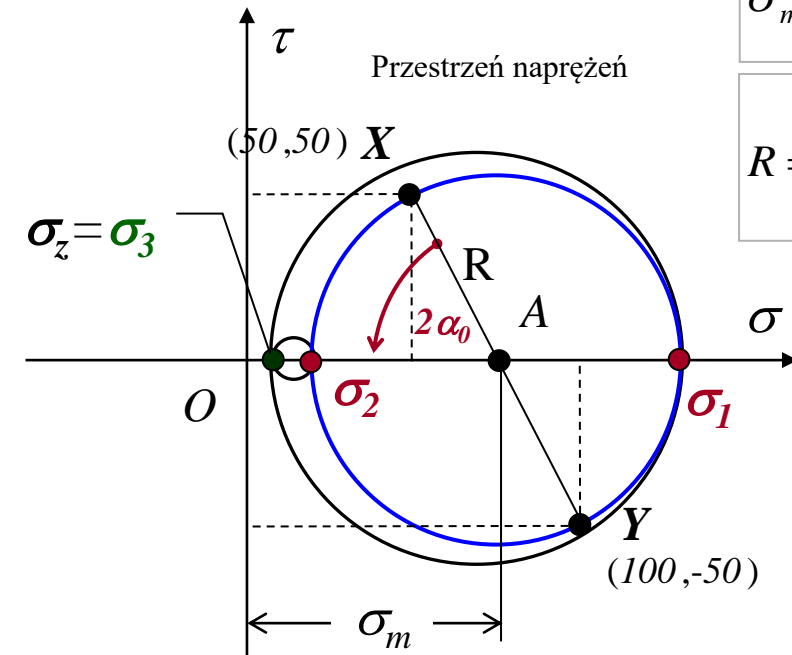
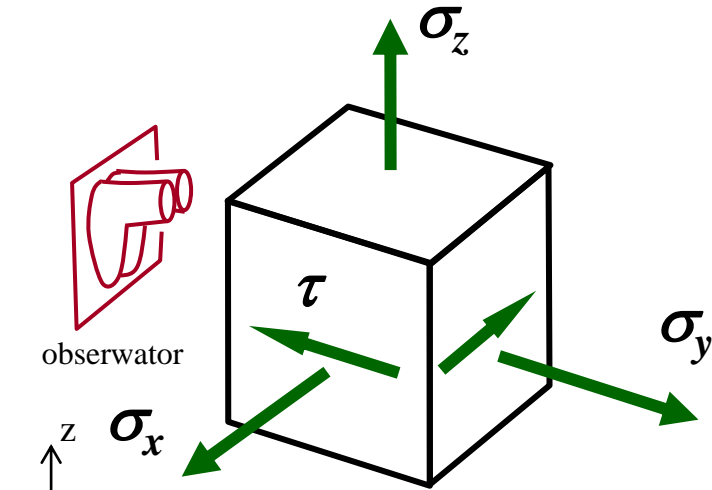
$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + 100}{2} = 75 \text{ MPa}$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\left(\frac{50 - 100}{2}\right)^2 + 50^2} = 56 \text{ MPa}$$

$$\sigma_1 = \sigma_m + R = 75 + 56 = 131 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_m - R = 75 - 56 = 19 \text{ MPa}$$

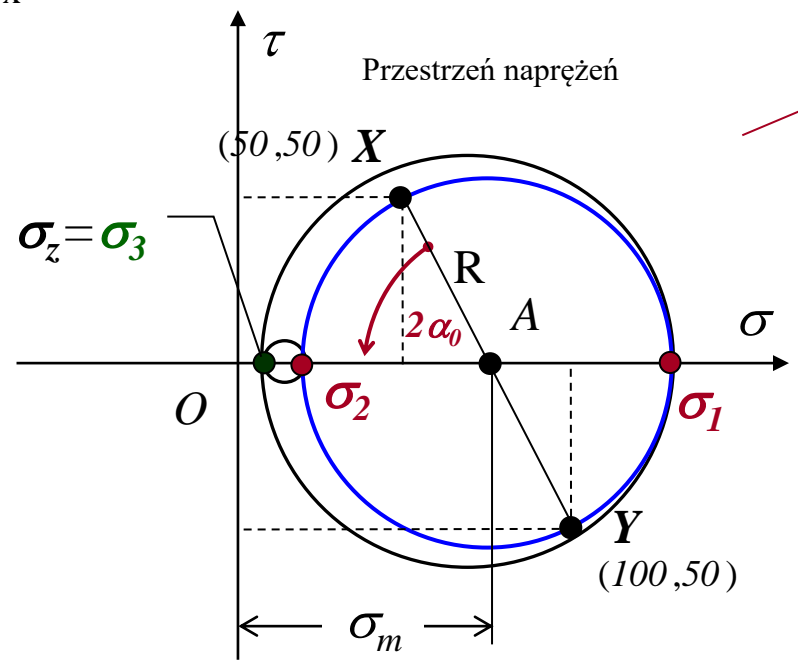
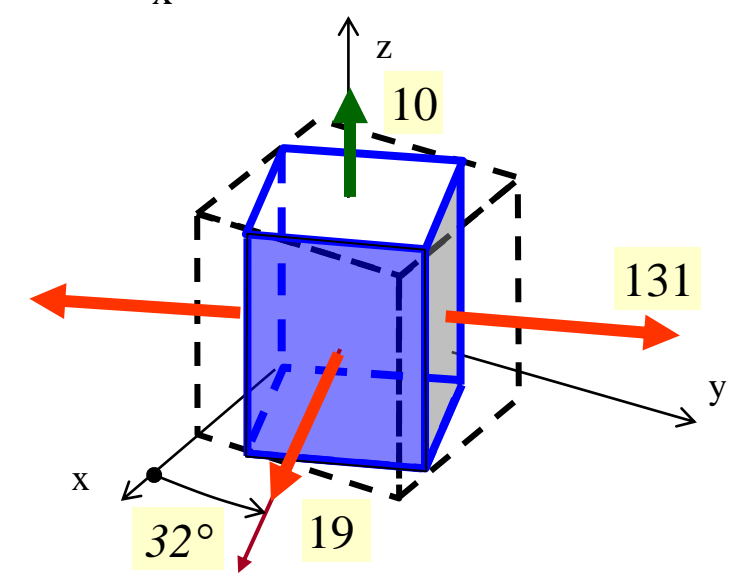
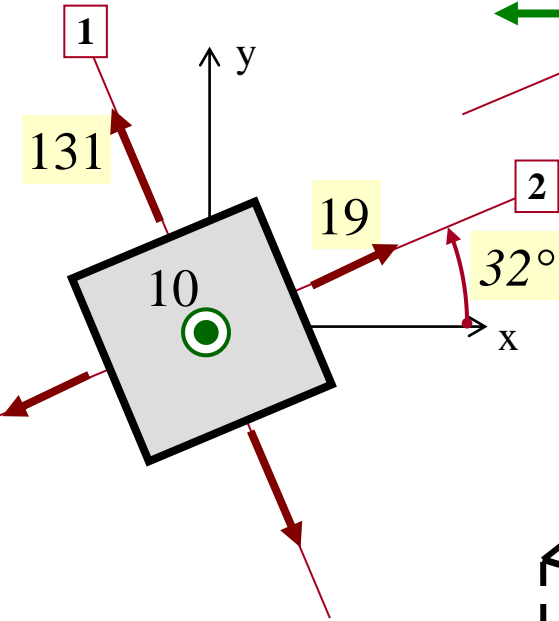
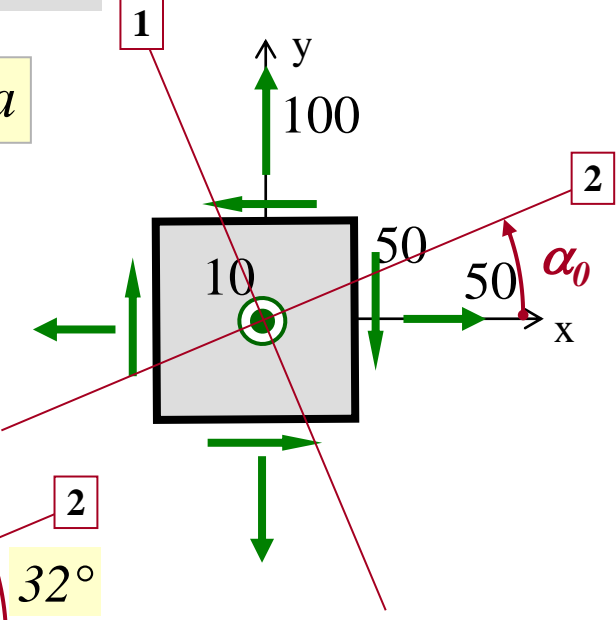
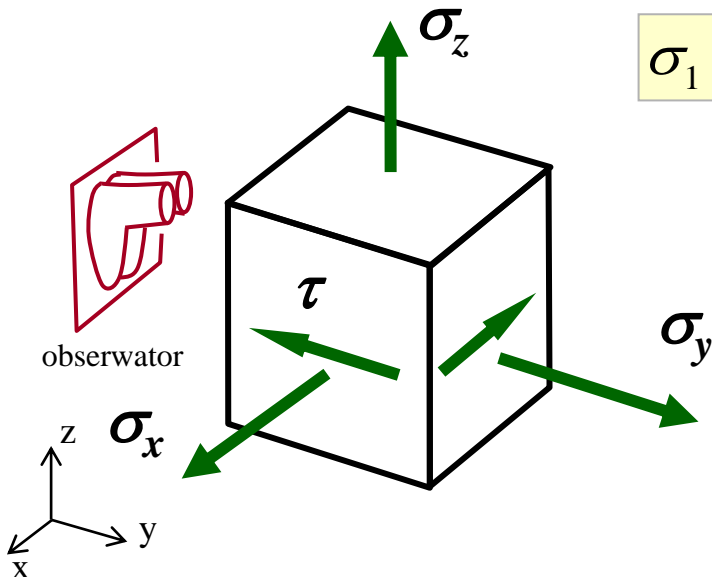
$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \left| \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \right| = \left| \frac{2 \cdot 50}{50 - 100} \right| = 2 \rightarrow \alpha_0 = 32^\circ$$



Pokażmy stan naprężeń w kierunkach głównych na kostce

$\sigma_1 = 131 \text{ MPa}$ $\sigma_2 = 19 \text{ MPa}$

$\alpha_0 = 32^\circ$

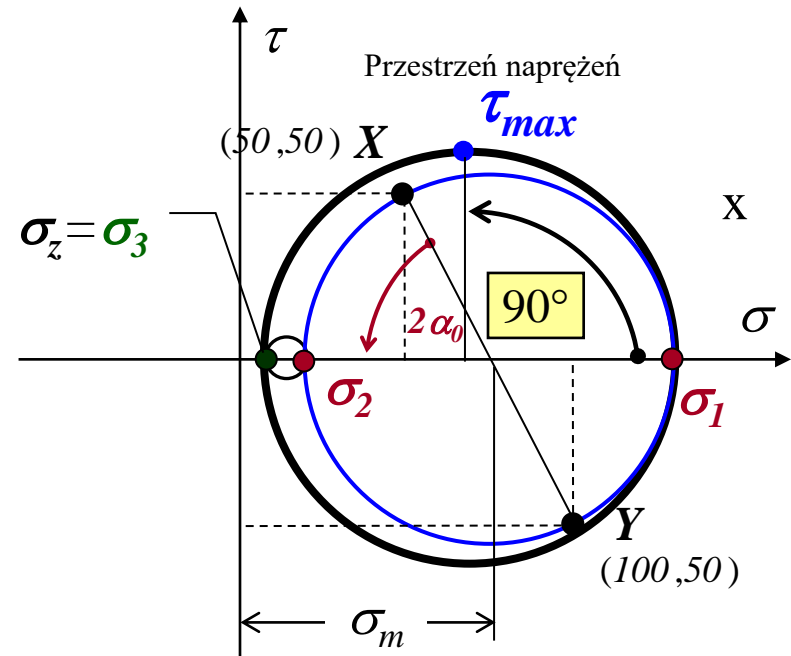
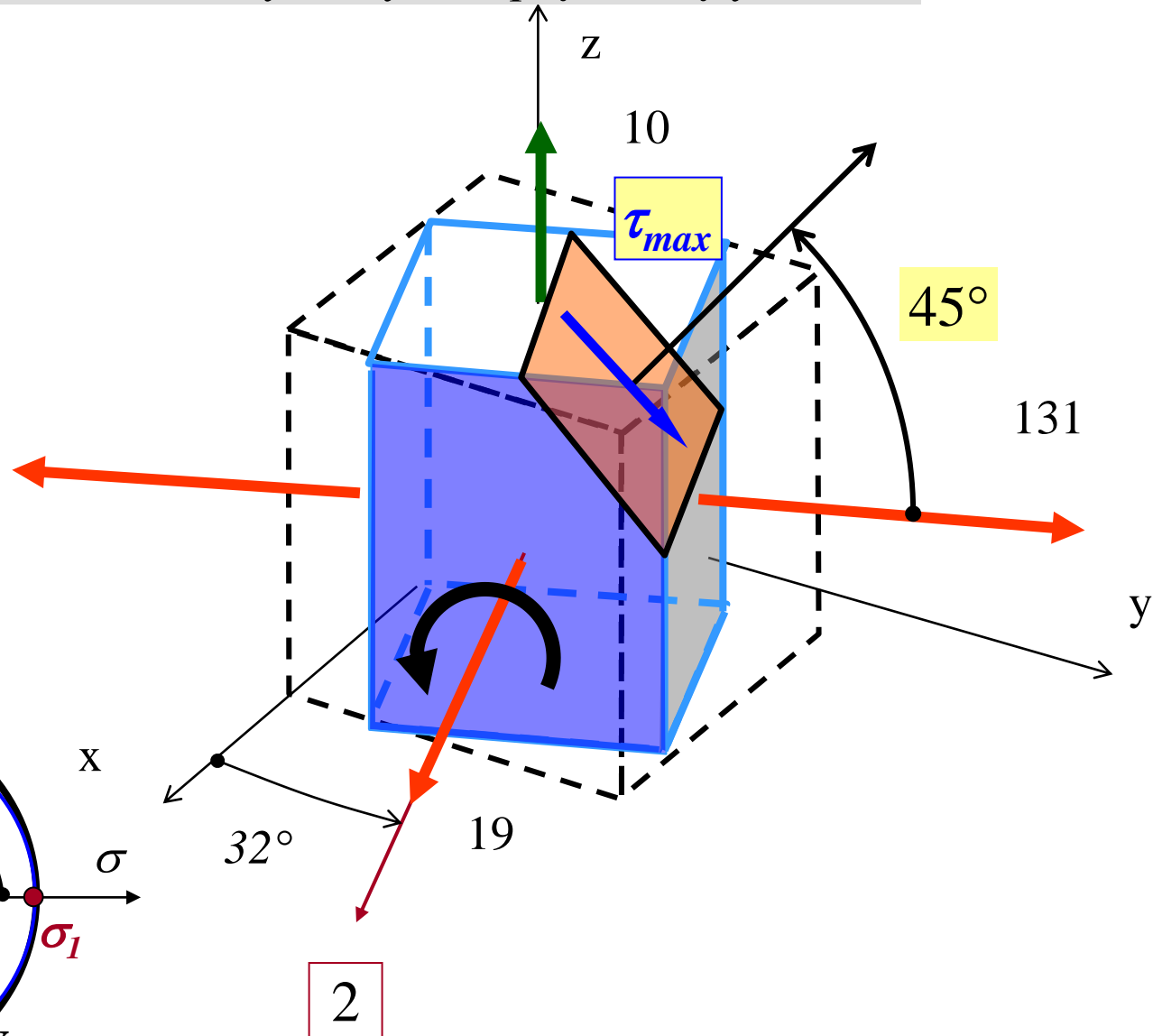


Pokażmy płaszczyznę działania maksymalnych naprężeń tnących

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |\sigma_1 - \sigma_3|$$

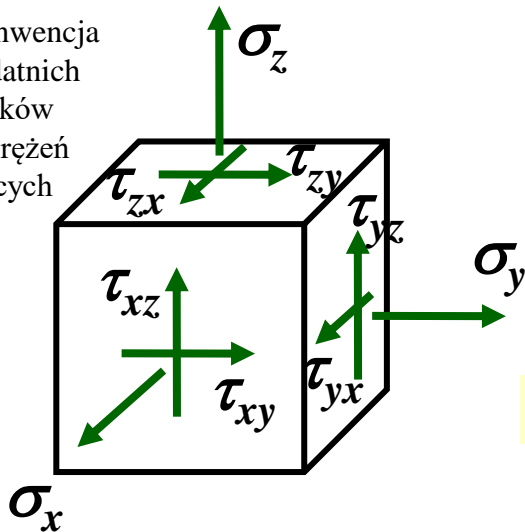
$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} |131 - 10|$$

$$\tau_{\max} = 61 \text{ MPa}$$



Metoda ogólna wyznaczania naprężeń głównych

Konwencja dodatnich znaków naprężeń tnących



Stan naprężenia w punkcie opisany jest matematycznie przez tensor rzędu II

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Zagadnienie na wartości własne:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma) \cdot n_j = 0$$

macierz jednostkowa

naprężenie główne

wektor własny

$$\left(\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \sigma & & \\ & \sigma & \\ & & \sigma \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Wartości własne wyznaczamy z warunku:

$$\det |\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma| = 0$$



$$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$$

(Naprężenia główne)

Kierunek główny 1:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma_1) \cdot n_j = 0$$

$$\begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

wektor własny dla kierunku 1

Kierunek główny 2:

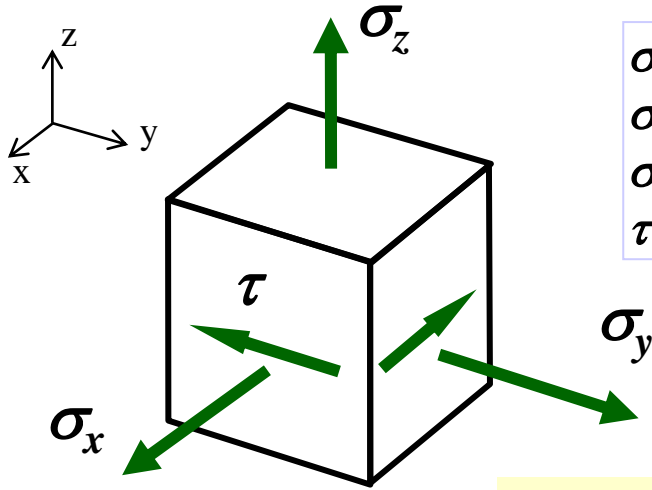
$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma_2) \cdot n_j = 0$$

$$\begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}$$

wektor własny dla kierunku 2

Kierunek główny 3
(analogicznie)

Przykład 2. Rozwiązać zadanie z przykładu 1 sposobem ogólnym (*zagadnienie na wartości własne*)



$$\begin{aligned}\sigma_x &= 50 \text{ MPa} \\ \sigma_y &= 100 \text{ MPa} \\ \sigma_z &= 10 \text{ MPa} \\ \tau &= 50 \text{ MPa}\end{aligned}$$

Stan naprężenia opisany jest tensorem

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

Zagadnienie na wartości własne:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma) \cdot n_j = 0$$

Wartości własne wyznaczamy z warunku:

$$\det |\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma| = 0 \rightarrow$$

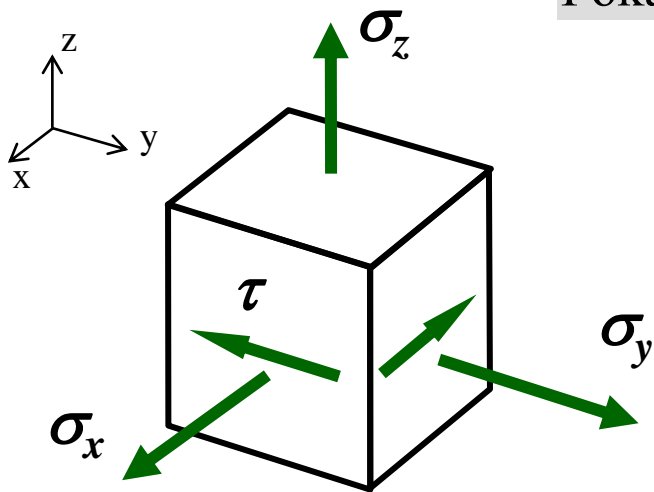
$$\det \left| \begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} - \sigma \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 50 - \sigma & -50 & 0 \\ -50 & 100 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 10 - \sigma \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (10 - \sigma) \begin{vmatrix} 50 - \sigma & -50 \\ -50 & 100 - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$(10 - \sigma)(\sigma^2 - 150\sigma + 2500) = 0 \rightarrow \sigma_1 = 131 \text{ MPa}, \sigma_2 = 19 \text{ MPa}, \sigma_3 = 10 \text{ MPa}$$

(Naprężenia główne)

Pokażmy stan naprężeń w kierunkach głównych na kostce



$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 131 \text{ MPa}, \sigma_2 = 19 \text{ MPa}, \sigma_3 = 10 \text{ MPa}$$

(Naprężenia główne)

Kierunek główny 1:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma_1) \cdot n_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 50 - \sigma_1 & -50 & 0 \\ -50 & 100 - \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 - \sigma_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} -81n_1 - 50n_2 = 0 \\ -50n_1 - 31n_2 = 0 \\ -121n_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} n_2 = -\frac{81}{50}n_1 \\ n_3 = 0 \end{cases}$$

Normalizacja wektora własnego

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_1^2 + \left(\frac{81}{50}\right)^2 n_1^2 + 0 = 1 \Rightarrow$$

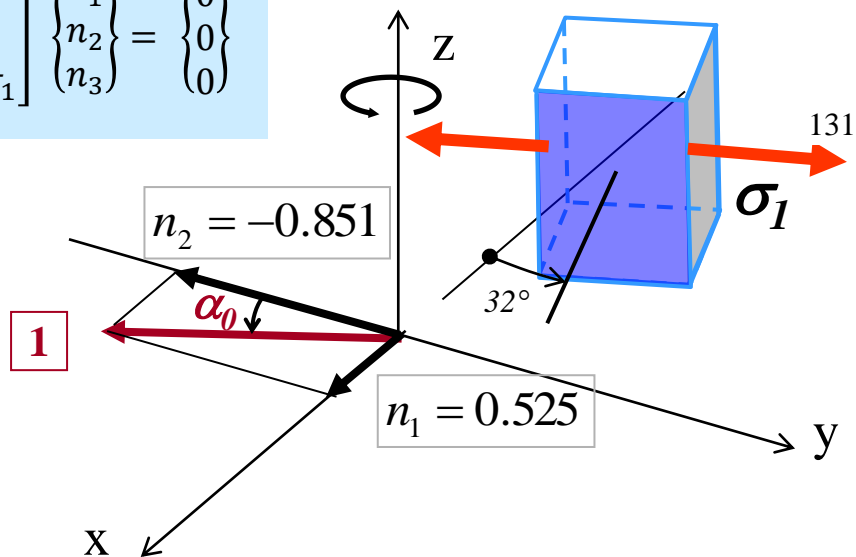
$$n_1 = 0.525$$

$$n_2 = -0.851$$

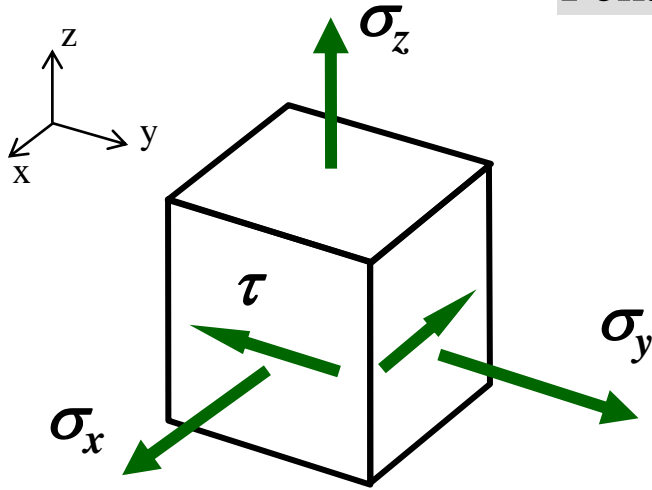
$$n_3 = 0$$

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{0.525}{0.851} \Rightarrow$$

$$\alpha_0 = 32^\circ$$



Pokażmy stan naprężeń w kierunkach głównych na kostce



$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 131 \text{ MPa}, \sigma_2 = 19 \text{ MPa}, \sigma_3 = 10 \text{ MPa}$$

(Naprężenia główne)

Kierunek główny 2:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma_2) \cdot n_j = 0$$



$$\begin{bmatrix} 50 - \sigma_2 & -50 & 0 \\ -50 & 100 - \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 10 - \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 31n_1 - 50n_2 = 0 \\ -50n_1 + 81n_2 = 0 \\ -9n_3 = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} n_2 = \frac{31}{50} n_1 \\ n_3 = 0 \end{cases}$$

Normalizacja wektora własnego

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

$$n_1^2 + \left(\frac{31}{50}\right)^2 n_1^2 + 0 = 1$$



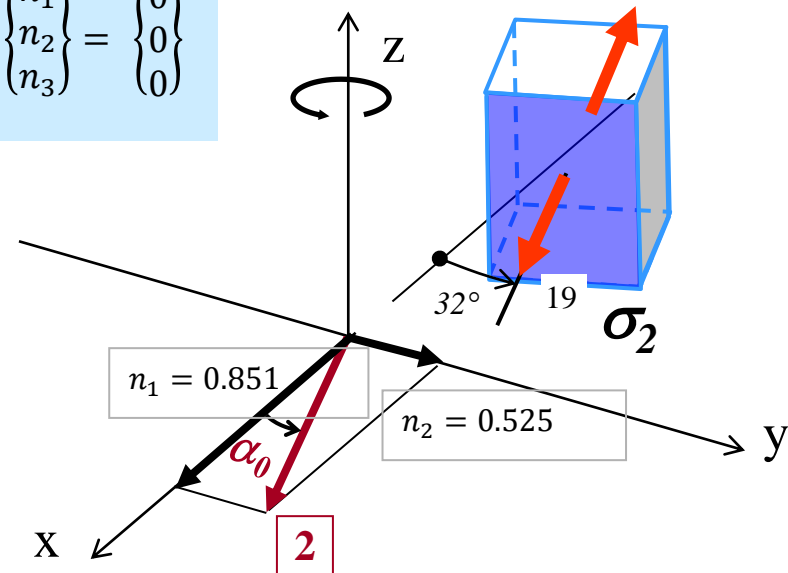
$$n_1 = 0.851$$

$$n_2 = 0.525$$

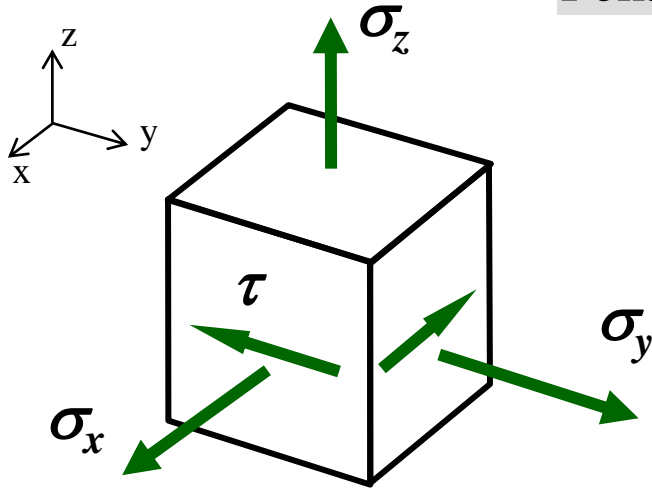
$$n_3 = 0$$

$$\text{tg } \alpha_0 = \frac{0.525}{0.851}$$

$$\rightarrow \alpha_0 = 32^\circ$$



Pokażmy stan naprężeń w kierunkach głównych na kostce



$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 131 \text{ MPa}, \sigma_2 = 19 \text{ MPa}, \sigma_3 = 10 \text{ MPa}$$

Kierunek główny 3:

$$(\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma_3) \cdot n_j = 0$$



$$\begin{bmatrix} 50 - \sigma_3 & -50 & 0 \\ -50 & 100 - \sigma_3 & 0 \\ 0 & 0 & 10 - \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} 40n_1 - 50n_2 = 0 \\ -50n_1 + 90n_2 = 0 \\ 0 \cdot n_3 = 0 \end{cases} \leftarrow n_1 = n_2 = 0$$

$$40n_1 - 36n_2 = 0$$

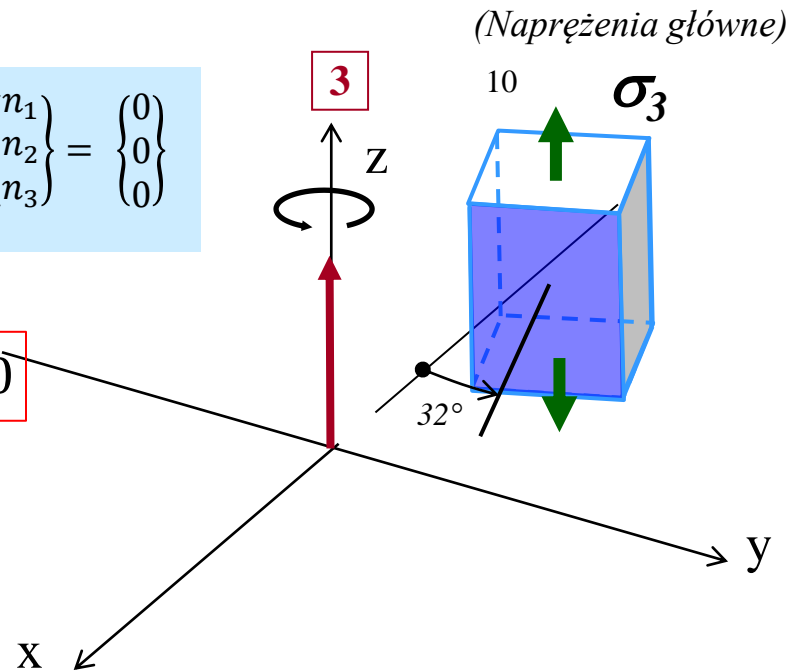
$$n_3 = \text{dowolne}$$

$$n_1 = 0$$

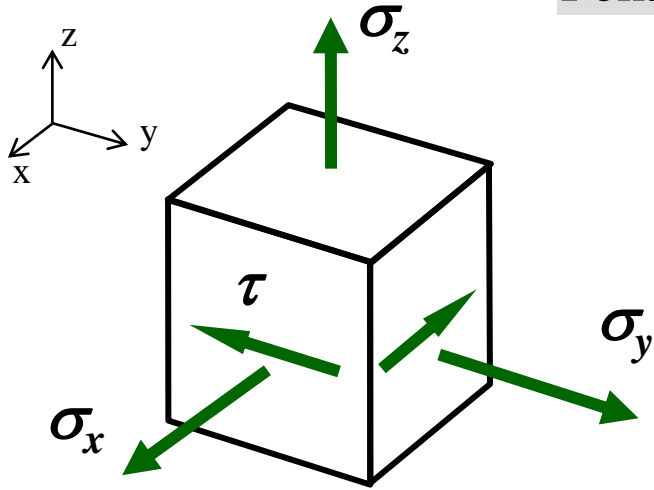
$$n_2 = 0$$

$$n_3 = 1$$

Normalizacja wektora własnego

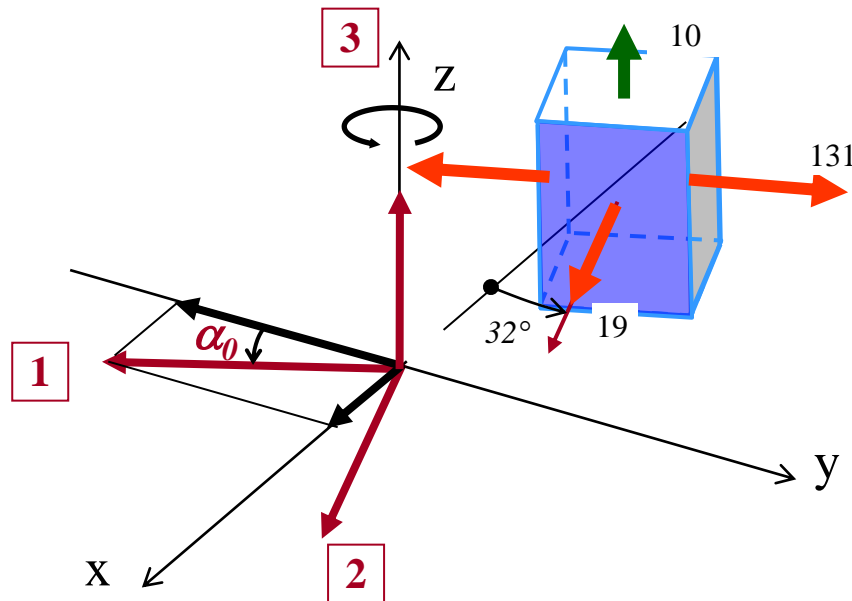


Pokażmy stan naprężeń w kierunkach głównych na kostce

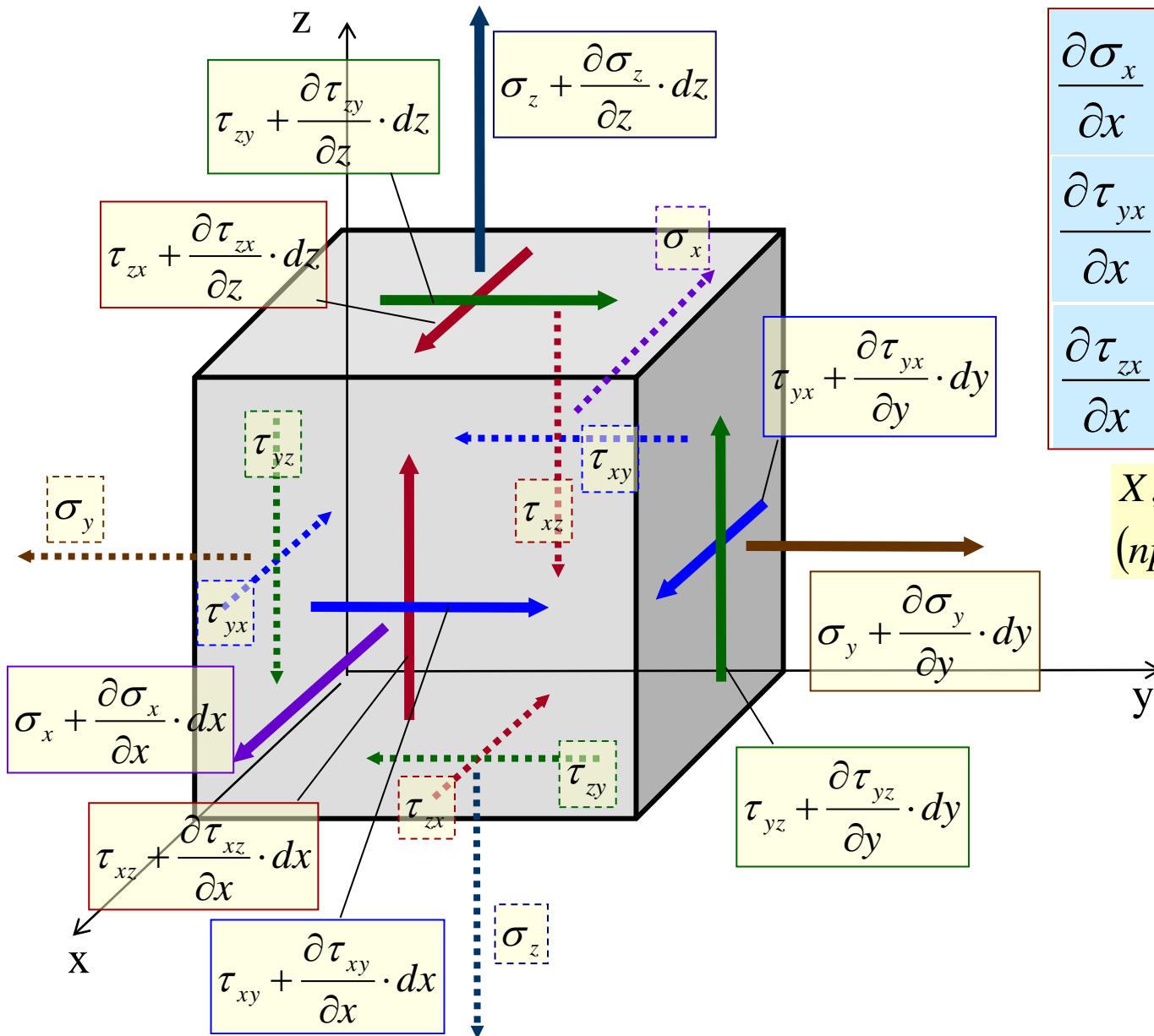


$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} 50 & -50 & 0 \\ -50 & 100 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1 = 131 \text{ MPa}, \sigma_2 = 19 \text{ MPa}, \sigma_3 = 10 \text{ MPa}$$



Równania równowagi w naprężeniach



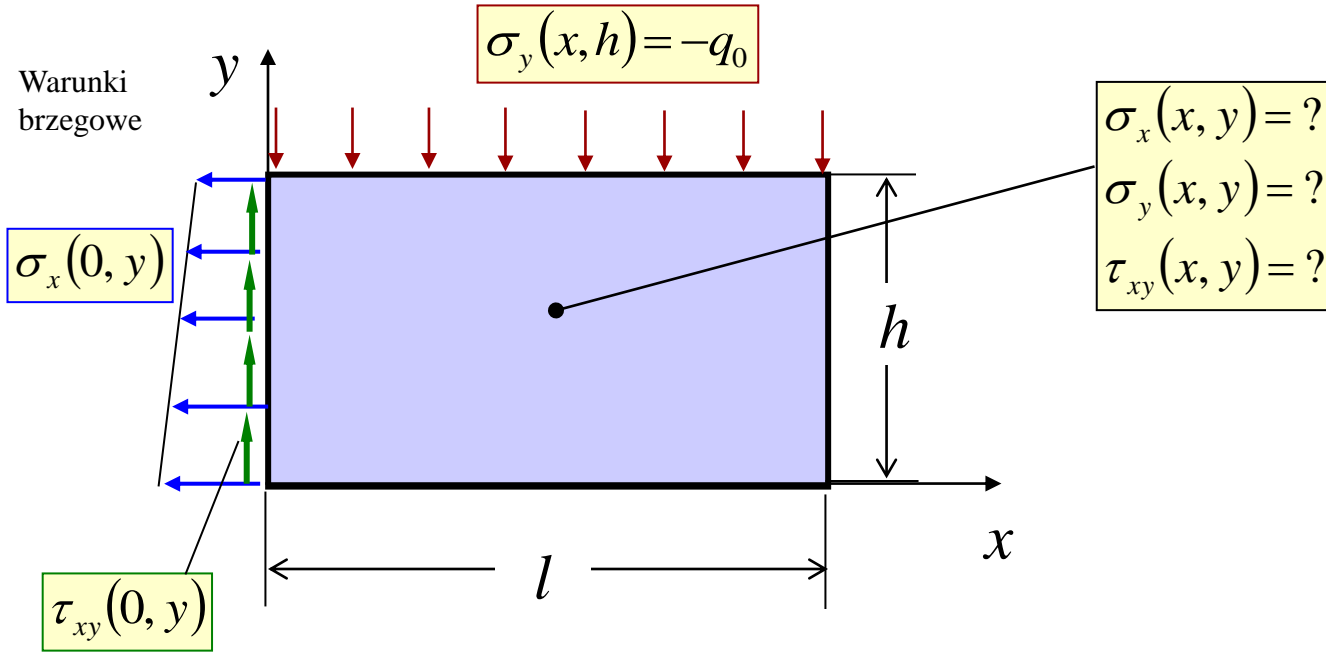
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$

X, Y, Z – pole sił masowych
(np: $Z = -g\rho$)

Przykład 3. Wyznaczyć stan naprężenia w prostokątnej tarczy



Równania równowagi dla płaskiego stanu naprężenia (PSN)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

Warunki brzegowe

$$\sigma_x(x, y)$$

$$\sigma_y(x, y)$$

$$\tau_{xy}(x, y)$$

$X, Y = 0$ (bez sił masowych)